

Capítulo 4

Cálculo diferencial de funciones reales de una variable real.

Este capítulo está dedicado a un concepto fundamental en el análisis matemático y sus aplicaciones en la física: La derivada. Se estudiarán fundamentalmente las derivadas de funciones reales de variable real y sus propiedades (incluyendo el comportamiento de las funciones elementales bajo la diferenciación). Comenzaremos el tema definiendo el concepto de derivada a partir del límite, y discutiendo algunos aspectos fundamentales que son consecuencia de esa definición, como la necesidad de que una función sea continua para que sea derivable, la interpretación geométrica de la derivada en un punto como la tangente a la curva en dicho punto, el álgebra de derivadas, la regla de la cadena para la derivación de funciones compuestas o la definición de derivada lateral. A continuación desarrollaremos la relación que existe entre la gráfica de una función y los valores de sus derivadas primera (crecimiento, decrecimiento, extremos) y segunda (concavidad y convexidad, máximos y mínimos); así como algunas consecuencias de dicha relación, en particular, el teorema de Rolle y el teorema del valor medio. La última parte del tema la dedicaremos al estudio de dos consecuencias del teorema del valor medio que serán esenciales para el alumno en el futuro, no sólo por su importancia dentro del análisis matemático, sino sobre todo por su intensiva utilización en el estudio de la física: La regla de L'Hopital para el cálculo de límites indeterminados y, principalmente, el Teorema de Taylor para la aproximación de funciones en el entorno de un punto mediante un polinomio construido a partir de sus derivadas.

La importancia de los contenidos de este tema es fundamental para la Física, ya que en ésta se estudia como dependen unas magnitudes o propiedades físicas con respecto de otras y la derivada representa, precisamente, la variación de una función con respecto de una variable. A partir de los valores de la derivada podemos saber si una función crece, decrece, tiene un máximo o un mínimo... lo cual es fundamental para el estudio de cualquier propiedad física. De hecho, las magnitudes físicas suelen relacionarse entre sí mediante derivadas (por ejemplo, la trayectoria, la velocidad y la aceleración cuando derivamos sucesivamente con respecto del tiempo). Como consecuencia, los fenómenos físicos se describen en general mediante ecuaciones diferenciales, es decir, mediante ecuaciones que contienen derivadas de unas magnitudes con respecto de otras y solo en algunos casos particulares dichas ecuaciones se transforman en expresiones algebraicas convencionales ($v = v_0 + a \cdot t$ solo si la aceleración es constante, por ejemplo). Son ecuaciones diferenciales, por ejemplo, las Leyes de Maxwell del Electromagnetismo, la ecuación de ondas, la ecuación de Schrödinger de la Mecánica Cuántica, etc.. En el próximo semestre comenzaréis a resolver este tipo de ecuaciones en la asignatura de Métodos Matemáticos IV.

Quizás el hecho más indicativo de la importancia de la derivada en Física sea que el propio Isaac Newton es considerado (junto con Leibniz) como uno de los padres del cálculo diferencial, que tuvo que desarrollar para sentar los principios de la mecánica clásica. Más allá de la mecánica, otros ejemplos de magnitudes físicas que se obtienen derivando otras serían la potencia y la intensidad de corriente, que corresponden a la variación temporal de, respectivamente, el trabajo y la carga. El cálculo de máximos y mínimos también se aplica de forma directa en todas las áreas de la física: La naturaleza se rige a menudo por el principio de mínima energía y, por lo tanto, la minimización de esta magnitud es una técnica muy habitual en el estudio de fenómenos físicos. En cuanto a los máximos, estos son esenciales para el cálculo de la estabilidad de un sistema. Por último, el desarrollo en serie de Taylor juega un papel fundamental a la hora de abordar problemas físicos, pues en determinadas condiciones nos permite simplificar las funciones (eventualmente complejas) que los describen mediante un polinomio, facilitando así su tratamiento.

4.1. Derivada de una función.

Definición 65 Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real definida en el intervalo abierto (a, b) , y sea $c \in (a, b)$. Se dice que f es diferenciable en c siempre que exista el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$

A dicho límite se le denomina derivada de f en c y se le denota por $f'(c)$. Las derivadas de f en todos los puntos del intervalo (a, b) definen una nueva función en dicho intervalo, conocida como *primera derivada de f* , que suele denotarse por f' . Procediendo de modo análogo, podemos construir la función derivada de f' siempre que existan los correspondientes límites en los puntos $c \in (a, b)$. A la función derivada de f' se le denomina *segunda derivada de f* , y se denota por f'' . Este proceso de construcción de funciones derivadas puede continuar, siempre que existan los correspondientes límites, y así tendríamos en general la n -ésima función derivada de f , denotada por $f^{(n)}$, que sería la primera derivada de la función $f^{(n-1)}$. A este proceso de obtención de f' y sucesivas derivadas a partir de f se le denomina *diferenciación*.

Otras notaciones para la función derivada son:

$$f'(c) = Df(c) = \frac{df(c)}{dx} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=c}$$

La notación df/dx fue introducida por Leibniz en el siglo XVII y tiene la virtud de recordarnos, de una manera compacta, que la derivación es un cociente de cantidades infinitesimales llevado al límite. Definiendo $\Delta f = f(x) - f(c)$ y $\Delta x = x - c$ tenemos

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Para abreviar esta última expresión utilizamos entonces la notación de Leibniz y ponemos

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$$

Más adelante veremos que en diversas ocasiones la expresión df/dx puede ser tratada como un cociente ordinario de números finitos (por ejemplo, al aplicar la regla de la cadena), de modo que con operaciones algebraicas sencillas de cancelación de numeradores con denominadores se obtienen fácilmente resultados cuya demostración rigurosa sería más complicada empleando la definición de derivada. En campos de la Física (y asignaturas de la titulación) como Mecánica, Termodinámica, etc. se opera frecuentemente de ese modo con las derivadas. Conviene, en todo caso, tener siempre presente que en el cociente df/dx hay implícito un paso al límite (que, entre otras cosas, habrá que ver si existe...) y que el tratamiento algebraico ingenuo de estos cocientes no garantiza un resultado correcto en todos los casos.

Ejemplos de derivadas de funciones elementales obtenidas a partir de la definición de derivada:

- Función constante, $f(x) = k \quad \forall x \in (a, b)$,

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{k - k}{x - c} = 0$$

- $f(x) = x$,

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{x - c}{x - c} = 1$$

- $f(x) = a^x$, con $x \in \mathbb{R}$ y $a > 0$. Veamos que $f'(x) = a^x \log(a)$. En efecto¹:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{a^x - a^c}{x - c} = a^c \lim_{x \rightarrow c} \frac{a^{(x-c)} - 1}{x - c} = a^c \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a^y - 1}{y} = a^c \log(a)$$

Obsérvese que si $a = e$ tendremos $f(x) = e^x$, y $f'(c) = e^c \log(e) = e^c$.

¹Recuerda que en el apartado *b* del ejercicio 26 del Tema 3 se demuestra que:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{a^y - 1}{y} = \log(a)$$

- $f(x) = \log(x) \equiv \ln(x)$, con $x > 0$. Comprobemos que $f'(x) = 1/x$.

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\ln x - \ln c}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\ln(x/c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\ln\left(\frac{c}{c} + \frac{x - c}{c}\right)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\ln\left(1 + \frac{x - c}{c}\right)}{x - c}$$

hacemos $y = (x - c)/c$, con lo cual: $f'(c) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{yc} = \frac{1}{c} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} = \frac{1}{c}$

- $f(x) = \text{sen}(x)$, con $x \in \mathbb{R}$, entonces $f'(x) = \cos(x)$. En efecto²:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\text{sen } x - \text{sen } c}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{2 \text{sen}\left(\frac{x - c}{2}\right) \cos\left(\frac{x + c}{2}\right)}{x - c} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \text{sen}(y) \cos\left(\frac{2y + 2c}{2}\right)}{2y}$$

siendo $y = (x - c)/2$. Por tanto,

$$f'(c) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(y)}{y} \cos(y + c) = \cos(c)$$

Donde hemos utilizado que $\text{sen}(x) \simeq x$ cuando $x \rightarrow 0$, tal y como hemos visto en uno de los ejercicios del Tema 3.

4.2. Derivadas y continuidad.

Teorema 57 Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $c \in (a, b)$. Entonces existe una función f^* (que depende de f y de c) que es continua en c y que satisface la siguiente ecuación

$$f(x) - f(c) = (x - c)f^*(x) \quad \forall x \in (a, b), \tag{4.1}$$

siendo $f^*(c) = f'(c)$. Recíprocamente, si existe una función $f^*(x)$ que es continua en c y satisface la ecuación anterior, f es diferenciable en c y cumple $f'(c) = f^*(c)$.

Demostración: “ \implies ” Sabemos que f es diferenciable en $c \in (a, b)$, por lo tanto podemos afirmar que existe $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$. Definimos entonces $f^*(x)$ en $\forall x \in (a, b)$ como la siguiente función que depende de f y c ,

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} & \text{si } x \neq c \\ f'(c) & \text{si } x = c \end{cases} \quad \forall x \in (a, b)$$

Está claro que f^* es continua en c , pues por hipótesis de partida existe el $\lim_{x \rightarrow c} f^*(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ y por definición este límite es igual a $f^*(c) = f'(c)$. Además, la ecuación de la definición del teorema también se verifica trivialmente $\forall x \in (a, b)$ debido a la propia definición de $f^*(x)$ que hemos adoptado, ya que,

$$f^*(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \implies f(x) - f(c) = f^*(x)(x - c) \quad \forall x \in (a, b)$$

Nos falta demostrar la implicación inversa. En ese caso lo que sabemos de partida es que existe una función $f^*(x)$ continua en $x = c$ que verifica $f(x) - f(c) = f^*(x)(x - c)$ para todo $x \in (a, b)$. Dividimos ambos miembros de esta expresión por $(x - c)$ y tenemos,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f^*(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

Y tomando el límite cuando x tiende a c :

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} f^*(x) = f^*(c)$$

²Recordemos la siguiente identidad trigonométrica: $\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta = 2 \text{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$

La última igualdad está garantizada por la hipótesis de que f^* es continua en $x = c$. Esto demuestra que el $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ existe, que por lo tanto $f'(c)$ también, y que además $f'(c) = f^*(c)$.

Teorema 58 Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $c \in (a, b)$. Entonces se cumple que f es continua en $x = c$.

De acuerdo con este teorema, una condición *necesaria* para la derivabilidad de una función en un punto es que la función sea continua en dicho punto.

Demostración: Al ser f diferenciable en $x = c$, por el teorema anterior sabemos que existe una f^* que es continua en $x = c$ y cumple $f(x) - f(c) = (x - c)f^*(x) \quad \forall x \in (a, b)$ [o, lo que es lo mismo $f(x) = f(c) + (x - c)f^*(x) \quad \forall x \in (a, b)$], siendo además $f'(c) = f^*(c)$. Para ver que f es continua en c basta demostrar que existe el $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ y que es igual a $f(c)$. Veamos ese límite:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) + \lim_{x \rightarrow c} (x - c)f^*(x) = f(c) + 0 \cdot f^*(c) = f(c)$$

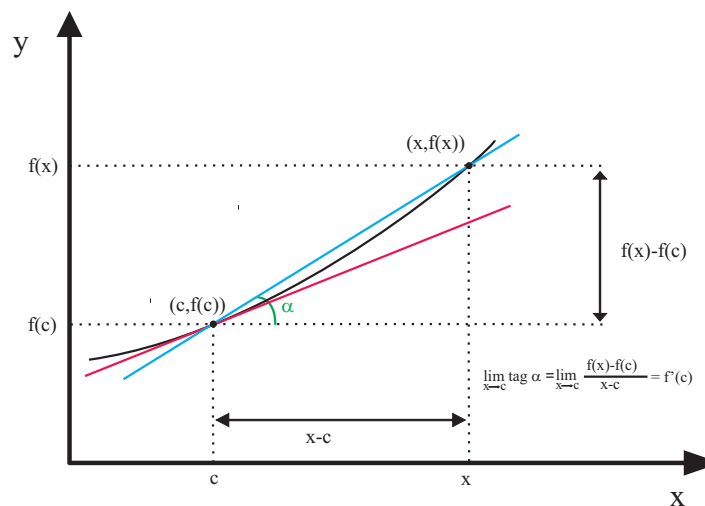
donde hemos aplicado que f^* es continua en $x = c$ y por tanto existe $\lim_{x \rightarrow c} f^*(x) = f^*(c)$.

4.3. Interpretación geométrica del concepto de derivada.

El teorema 57 nos ayuda a mostrar que la derivada de la función $f(x)$ en un punto puede interpretarse como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en dicho punto. En efecto, si $f(x)$ es derivable en (a, b) , sabemos que existe una $f^*(x)$ que verifica la expresión $f(x) - f(c) = (x - c)f^*(x) \quad \forall x \in (a, b)$ y que además es continua en c . Por lo tanto, en las cercanías de este punto podemos realizar la aproximación $f^*(x) \approx f^*(c)$ y escribir $f(x) - f(c) \approx (x - c)f^*(c)$ cuando x . Como además $f^*(c) = f'(c)$, tenemos

$$f(x) \approx f(c) + (x - c)f'(c) \quad \text{si } x \approx c$$

Obsérvese que a la derecha de esta expresión tenemos la ecuación de una recta que pasa por el punto $(c, f(c))$ y tiene como pendiente $f'(c)$. Por lo tanto $f'(c)$ se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la curva en $x = c$, tal como se muestra en la siguiente figura.



Interpretación geométrica del concepto de derivada: Como se observa en la figura, la recta que pasa por los puntos $(c, f(c))$ y $(x, f(x))$ (color azul) tiene una pendiente $\tan \alpha = [f(x) - f(c)] / (x - c)$. Si hacemos que $x \rightarrow c$ esa recta secante se transforma progresivamente en la recta tangente a $f(x)$ en c (color rojo) que tiene como pendiente $f'(c)$, pues por definición $\lim_{x \rightarrow c} \tan \alpha = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{(x - c)} = f'(c)$.

4.4. Álgebra de derivadas y regla de la cadena.

Teorema 59 Sean f y g dos funciones diferenciables en $c \in (a, b)$. Entonces las funciones $f + g$, $f - g$ y $f \cdot g$ son también diferenciables en c . Asimismo, f/g es diferenciable en c siempre que $g(c) \neq 0$. Las correspondientes derivadas vienen dadas por las siguientes fórmulas:

$$(a) (f \pm g)'(c) = f'(c) \pm g'(c)$$

$$(b) (f \cdot g)'(c) = f'(c) \cdot g(c) + f(c) \cdot g'(c)$$

$$(c) (f/g)'(c) = \frac{1}{g^2(c)} [f'(c) \cdot g(c) - f(c) \cdot g'(c)]$$

Demostración: Al ser f y g derivables en $c \in (a, b)$, por el teorema 57 sabemos que existen $f^*(x)$ y $g^*(x)$ que son continuas en c y que verifican $f^*(c) = f'(c)$, $g^*(c) = g'(c)$, $f(x) = f(c) + (x - c)f^*(x)$ y $g(x) = g(c) + (x - c)g^*(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Utilizando esto, vamos a intentar demostrar la existencia de funciones “*” para la suma, el producto, y el cociente de f y g que verifiquen la ecuación 4.1 del teorema 57 y sean continuas en c . Ello nos garantizará la derivabilidad de la suma, el producto, y el cociente de f y g . Además, las funciones “*” evaluadas en c coincidirán con la correspondiente derivada.

(a) Sustituyendo obtenemos $f(x) \pm g(x) = f(c) \pm g(c) + (x - c)[f^*(x) \pm g^*(x)]$, por lo tanto existe una función que verifica la ecuación 4.1 del teorema 57 para la función $f(x) \pm g(x)$. Dicha función es $f^*(x) \pm g^*(x)$ que es continua en c [pues $f^*(x)$ y $g^*(x)$ son continuas en c] y que verifica $f^*(c) \pm g^*(c) = f'(c) \pm g'(c)$, con lo cual la proposición (a) queda demostrada.

(b) Sustituyendo obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= [f(c) + (x - c)f^*(x)][g(c) + (x - c)g^*(x)] = \\ &= f(c) \cdot g(c) + (x - c)g^*(x)f(c) + (x - c)f^*(x)g(c) + (x - c)^2 f^*(x)g^*(x) \end{aligned}$$

$$\text{Es decir, } f(x) \cdot g(x) - f(c) \cdot g(c) = (x - c)[g^*(x)f(c) + f^*(x)g(c)] + (x - c)^2 f^*(x)g^*(x)$$

Dividiendo por $(x - c)$ esta expresión se transforma en

$$\frac{f(x) \cdot g(x) - f(c) \cdot g(c)}{(x - c)} = g^*(x)f(c) + f^*(x)g(c) + (x - c)f^*(x)g^*(x)$$

Tomando el límite cuando $x \rightarrow c$, a ambos lados de la igualdad obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(c) \cdot g(c)}{(x - c)} = 3g^*(c)f(c) + f^*(c)g(c) = g'(c)f(c) + f'(c)g(c)$$

Como el límite de la izquierda es, por definición, $(f \cdot g)'(c)$, queda demostrada la proposición.

(c) Desarrollamos $f(x)/g(x)$ aplicando de nuevo el teorema 57,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c) + (x - c)f^*(x)}{g(c) + (x - c)g^*(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} + \frac{f(c) + (x - c)f^*(x)}{g(c) + (x - c)g^*(x)} - \frac{f(c)}{g(c)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(c)}{g(c)} = \frac{\cancel{g(c)}f^*(x) + (x - c)f^*(x)g(c) - \cancel{f(c)}g^*(x) - (x - c)g^*(x)f(c)}{[g(c)]^2 + (x - c)g^*(x)g(c)}$$

$$\text{dividiendo por } (x - c) \text{ obtenemos: } \frac{1}{(x - c)} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(c)}{g(c)} \right) = \frac{f^*(x)g(c) - g^*(x)f(c)}{[g(c)]^2 + (x - c)g^*(x)g(c)}$$

Aplicando el límite cuando $x \rightarrow c$ a esta igualdad a la izquierda tenemos, por definición, $\left(\frac{f}{g}\right)'(c)$. Por tanto

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{(x-c)} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(c)}{g(c)} \right) = \left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f^*(c)g(c) - g^*(c)f(c)}{[g(c)]^2} = \frac{f'(c)g(c) - g'(c)f(c)}{[g(c)]^2}$$

Tal y como queríamos demostrar.

Ejemplos de derivadas obtenidas aplicando álgebra de derivadas:

- $f(x) = x^2$, utilizamos la regla de la derivada del producto de funciones:

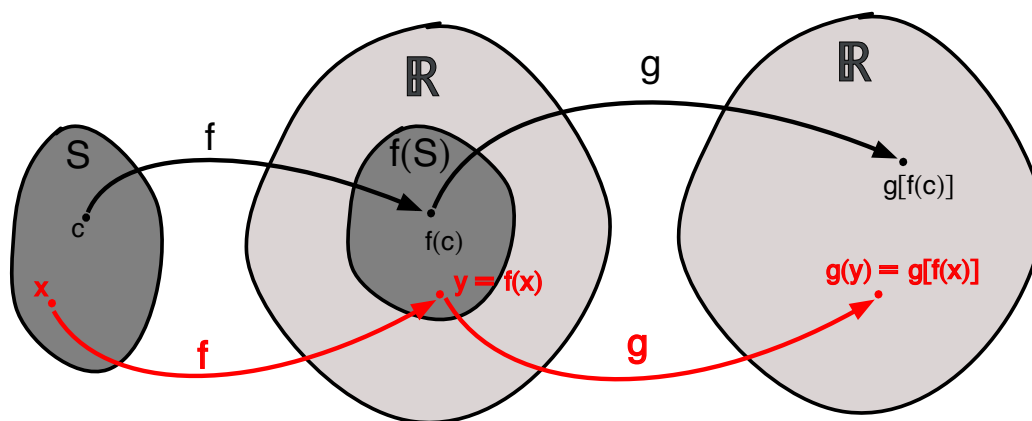
$$(x^2)' = (x \cdot x)' = x \cdot 1 + 1 \cdot x = 2x$$

- Por inducción podemos demostrar que $(x^n)' = nx^{n-1}$. En efecto, supongamos que la regla se cumple para $n - 1$, es decir, $(x^{n-1})' = (n - 1)x^{n-2}$, entonces $(x^n)' = (x^{n-1}x)' = (x^{n-1})'x + x^{n-1} \cdot 1 = (n - 1)x^{n-2}x + x^{n-1} = (n - 1)x^{n-1} + x^{n-1} = nx^{n-1}$ □.

Teorema 60 (Regla de la Cadena). Sean $S = (a, b)$ y las funciones $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : f(S) \rightarrow \mathbb{R}$. Considérese la función compuesta:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

Si existe un punto $c \in S$ tal que $f(c)$ es interior a $f(S)$, f es diferenciable en c y g es diferenciable en $f(c)$, la función compuesta $g \circ f$ es diferenciable en c y se cumple $(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$



Esquema de aplicación de la regla de la cadena. La función f tiene como dominio al conjunto S , a cuyos puntos genéricos denominaremos x . Su recorrido o rango es $f(S)$, que podría ser, tal y como indica el enunciado, todo \mathbb{R} . $f(S)$ es a su vez el dominio de la función g , que toma valores reales (su recorrido podría ser también todo \mathbb{R}). A los puntos genéricos del conjunto $f(S)$, sobre los cuales se aplica g , los denominaremos y . Obviamente, para cada $y \in f(S)$ existe un $x \in S$ tal que $y = f(x)$. Finalmente, se supone que f es diferenciable en c y g lo es en $f(c)$.

Demostración: Como f es diferenciable en c sabemos que existe una $f^*(x)$ tal que $f(x) = f(c) + (x - c)f^*(x)$ para todo $x \in S$, siendo $f^*(x)$ una función continua en c verificando $f^*(c) = f'(c)$. Además, como g es diferenciable en $f(c)$, se verifica $g(y) = g[f(c)] + [y - f(c)]g^*(y)$ para todo " y " de un cierto subintervalo abierto T de $f(S)$ que contenga a $f(c)$, siendo $g^*(y)$ una función continua en $f(c)$ verificando $g^*[f(c)] = g'[f(c)]$. Como $y \in f(S)$, entonces existe un $x \in S$ tal que $y = f(x)$. Realizando esta sustitución en la expresión de $g(y)$ obtenemos

$$g[f(x)] = g[f(c)] + [f(x) - f(c)]g^*[f(x)] = g[f(c)] + [f(c) + (x - c)f^*(x) - f(c)]g^*[f(x)]$$

Donde hemos utilizado que $f(x) = f(c) + (x - c)f^*(x)$. Entonces:

$$g[f(x)] = g[f(c)] + (x - c)f^*(x)g^*[f(x)] \implies \frac{g[f(x)] - g[f(c)]}{x - c} = f^*(x)g^*[f(x)]$$

y tomando límites

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{g[f(x)] - g[f(c)]}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} f^*(x)g^*[f(x)] = f^*(c)g^*[f(c)] = f'(c)g'[f(c)]$$

Dado que el límite de la izquierda es, por definición, $(g \circ f)'(c)$, queda demostrado el teorema.

Ejemplo: Comprobemos que la regla de la cadena es consistente con la regla de derivación de potencias enteras que hemos visto antes. Supongamos $f(x) = x^n$ y $g(x) = x^m$, entonces $g[f(x)] = (x^n)^m = x^{nm}$. Pero $g'(x) = mx^{m-1}$, $f'(x) = nx^{n-1}$, con lo cual aplicando la regla de la cadena tenemos $(g[f(x)])' = (x^{nm})' = f'(x)g'[f(x)] = nx^{n-1}m(x^n)^{m-1} = nm x^{n-1} x^{nm-n} = nm x^{nm-1}$, como era de esperar.

Como hemos comentado anteriormente, utilizando la notación de Leibniz la regla de la cadena toma la apariencia de una identidad algebraica trivial. En efecto, En efecto, si en la expresión de dicha regla que acabamos de demostrar:

$$(g \circ f)'(x) = (g[f(x)])' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

tenemos en cuenta que $y = f(x)$, $f'(x) = dy/dx$ y empleamos la notación de Leibniz, ésta se transforma en

$$\frac{dg(f(x))}{dx} = \frac{dg(y)}{dx} = \frac{dg}{dy} \frac{dy}{dx}$$

Cancelando los dos dy recuperaríamos la parte izquierda de la igualdad, $\frac{dg}{dx}$. Este ejemplo de la regla de la cadena ilustra que la notación de Leibniz es muy intuitiva y facilita la obtención de ciertos resultados si la usamos con cuidado pero, como hemos dicho, conviene recordar que no se trata simplemente del cociente de dos números o cantidades “ordinarias” (hay un paso al límite de por medio).

4.5. Derivada de una función implícita.

Una ecuación con dos incógnitas $F(x, y) = 0$ siempre define implícita o explícitamente a una función $y = f(x)$ en el punto o el conjunto de puntos en los que se verifique $F(x, f(x)) = 0$. Esa definición es *explícita* cuando la ecuación F es sencilla y nos permite despejar “ y ” como función de “ x ” con facilidad y calcular las derivadas de la expresión resultante de forma directa [por ejemplo, si $F(x, y) = 3x + 5y - 4 = 0$ tendremos que $y = f(x) = (4 - 3x)/5$]. Sin embargo, cuando la ecuación $F(x, y) = 0$ es complicada lo normal es que no sea posible despejar $y = f(x)$ y obtener sus derivadas de forma sencilla. Decimos entonces que $y = f(x)$ esta definida *implícitamente*, y si f y F son derivables se puede obtener $y' = f'(x)$ derivando $F(x, f(x))$ como una función compuesta (esto es, aplicando la regla de la cadena) e igualando a cero el resultado.

Ejemplo:

Consideremos la siguiente ecuación:

$$\arctg(x - 2) + xy^2 e^{x-2y} + \ln\left(\frac{x + 3y}{x^2 + 1}\right) = 2,$$

Esta ecuación define implícitamente “ y ” como función de “ x ”. Entonces podemos escribir:

$$\arctg(x - 2) + xy^2(x)e^{x-2y(x)} + \ln\left(\frac{x + 3y(x)}{x^2 + 1}\right) - 2 = 0$$

Es necesario recalcar que esa definición implícita de “ y ” como función de “ x ” *puede no ser única*. De hecho, es posible que una ecuación implícita tenga (y por lo tanto defina) infinitas funciones $y(x)$. Por ejemplo, si en esta ecuación consideramos $x = 2$ obtenemos:

$$\overbrace{\arctg(2 - 2)}^0 + 2y^2 e^{2-2y} + \ln\left(\frac{2 + 3y}{5}\right) - 2 = 0$$

Es fácil darse cuenta de que $y = 1$ es una solución de esta ecuación. Pero hay otras dos en, aproximadamente $y \simeq 1,35$ e $y \simeq 11,65$ (puedes representar en Python $f(y) = 2y^2 e^{2-2y} + \ln\left(\frac{2 + 3y}{5}\right) - 2$ y

comprobar que es cierto). Por lo tanto, para $x = 2$ hay tres valores de “ y ” que son ceros de la ecuación. La evolución de esos tres ceros cuando se varía “ x ” en la ecuación implícita define tres funciones $y(x)$ distintas.

Por lo tanto, como puede haber varias $y(x)$ solución de la ecuación implícita, si quiero obtener la derivada de una de ellas para un x determinado tengo que identificarla. Por ejemplo, calculemos la derivada en $x = 2$ [esto es, $y'(2)$] de la que verifica que para ese valor de equis “ y ” vale 1, esto es $y(x = 2) = 1$. Para ello derivamos nuestra ecuación con respecto a x aplicando la regla de la cadena:

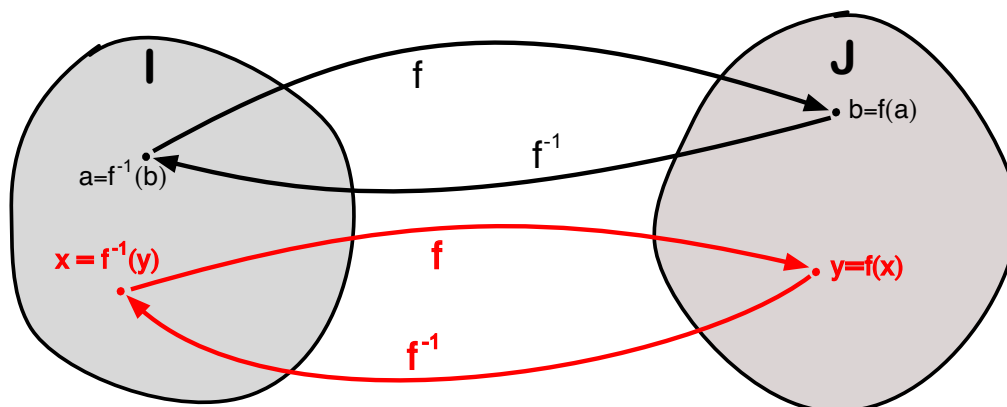
$$\frac{1}{1 + (x - 2)^2} + y^2(x)e^{x-2y} + 2xy(x)y'(x)e^{x-2y} + xy^2(x)e^{x-2y(x)}[1 - 2y'(x)] + \frac{x^2 + 1}{x + 3y(x)} \frac{[1 + 3y'(x)](x^2 + 1) - [x + 3y(x)]2x}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

y, a continuación, evaluamos en $x = 2$, $y(2) = 1$ y resolvemos la ecuación:

$$1 + 1 + 4y'(2) + 2[1 - 2y'(2)] + \frac{3y'(2) - 3}{5} = 0 \implies y'(2) = -\frac{17}{3}$$

4.6. Derivada de la función inversa.

Teorema 61 Sea $f : I \rightarrow J$ una función continua biyectiva de un intervalo I en otro intervalo J , de modo que existe su función inversa $f^{-1} : J \rightarrow I$. Si f es derivable en un punto $a \in I$ y $f'(a) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en el punto $b = f(a)$ y su derivada es $(f^{-1})'(b) = 1/f'(a)$, siendo $a = f^{-1}(b)$. Esto es, $(f^{-1})'(b) = 1/f'[f^{-1}(b)]$



Esquema ilustrativo de la demostración del teorema de la derivada de la función inversa. La función directa, cuya derivada es conocida, es la función f . Su dominio es el conjunto I , cuyos puntos denotaremos como “ x ”, y su recorrido o rango es el conjunto J , cuyos puntos denotaremos como “ y ”. Obviamente, al ser f biyectiva, si $y \in J$ debe existir un $x \in I$ (y solo uno) tal que $y = f(x)$. Análogamente para cada $x \in I$ ha de existir un $y \in J$ tal que $x = f^{-1}(y)$. La hipótesis del teorema establece que f es derivable en un punto de I que denominamos “ a ”, es decir, que existe $f'(a)$. La tesis es que si $f'(a) \neq 0$ entonces f^{-1} es derivable en el punto $b = f(a)$ y su derivada es $(f^{-1})'(b) = 1/f'(a)$. Como $a = f^{-1}(b)$ este resultado puede reescribirse como $(f^{-1})'(b) = 1/f'[f^{-1}(b)]$

Demostración: Como indica el esquema dibujado, llamaremos “ x ” a los elementos de I e “ y ” a los elementos de J . Recurriendo a la definición de derivada, debemos demostrar que

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} \stackrel{?}{=} \frac{1}{f'(a)} \quad \text{es decir} \quad \lim_{y \rightarrow b} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} \stackrel{?}{=} f'(a)$$

Obsérvese que para $y \neq b$ tenemos $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(b)$ porque f^{-1} es inyectiva, por lo tanto el denominador de la última expresión solo se anula en b . Utilizando, tal y como hemos visto en el esquema anterior, que $f^{-1}(b) = a$, $b = f(a)$, $y = f(x)$ y $x = f^{-1}(y)$; podemos reescribir la ecuación del siguiente modo:

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \stackrel{?}{=} f'(a)$$

Vemos que, efectivamente, la parte izquierda de esta expresión coincide con la definición de la derivada de f en el punto a , salvo porque tenemos $\lim_{y \rightarrow b}$ en lugar de $\lim_{x \rightarrow a}$. Ahora bien, como f^{-1} es continua en b (pues f lo es en a) podemos afirmar que si $y \rightarrow b$ entonces $f^{-1}(y) = x \rightarrow f^{-1}(b) = a$. Aplicando esto a la igualdad anterior, ésta se transforma en:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) ,$$

que es una igualdad que sabemos que se verifica por ser f derivable en a .

4.7. Derivadas laterales, derivadas infinitas y extremos relativos.

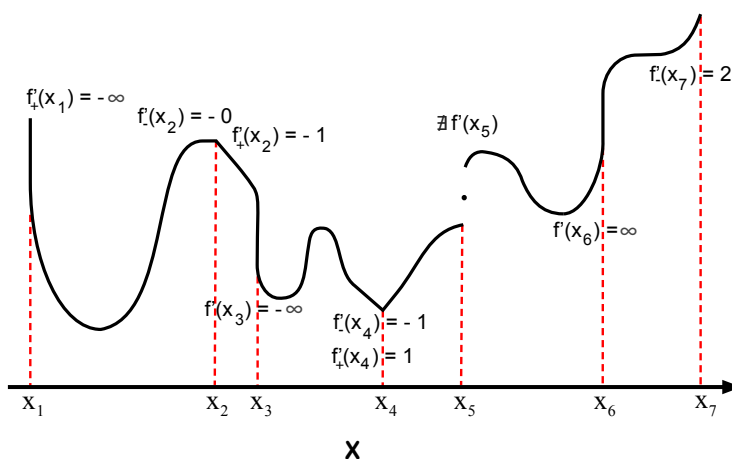
Hasta el momento sólo hemos considerado las derivadas en puntos interiores a un conjunto abierto, como es el intervalo (a, b) . A continuación extenderemos el concepto de derivada para el caso en que el punto c se encuentre en el extremo del intervalo. Por otro lado, resulta conveniente considerar también el caso de que la derivada de una función en un punto sea infinita, lo cual se interpreta geoméricamente como que la recta tangente a la curva en ese punto es vertical. El teorema 58 dice que la derivabilidad en un punto implica continuidad en ese punto, pero esto sólo es cierto cuando la derivada es finita. Si la derivada es infinita no es posible demostrar en general que la función sea continua en ese punto, aunque nosotros exigiremos explícitamente que sí lo sea en todos los casos con los que trabajemos.

Definición 66 (Derivadas laterales). Sea f una función real de variable real definida en un intervalo cerrado, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que f es continua en $c \in S$. Se dice entonces que f admite derivada lateral por la derecha de c si el siguiente límite lateral existe y es finito, o bien si es $+\infty$ o $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

A este límite lo denotaremos por $f'_+(c)$. Las derivadas laterales por la izquierda, $f'_-(c)$, se definen de modo análogo. Además, si c es un punto interior de S , diremos que f posee derivada en c (finita o infinita) si $f'_+(c) = f'_-(c)$, en cuyo caso $f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c)$. Es decir, una función es derivable si existen ambas derivadas laterales y coinciden. No obstante, al aplicar esta regla es muy importante tener en cuenta que no es lo mismo la derivada lateral que el límite lateral de la función derivada. Esto es, que $f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ no tiene porque ser igual a $\lim_{x \rightarrow c^+} f'(x)$. Si $\lim_{x \rightarrow c^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f'(x)$ ello indica que f' existe en c , es igual a ambos límites y por lo tanto continua. Pero se trata de una condición suficiente, no necesaria. Pueden no existir $\lim_{x \rightarrow c^+} f'(x)$ y $\lim_{x \rightarrow c^-} f'(x)$ o ser distintos y que la función f sí sea derivable en c .

La siguiente figura pretende ilustrar intuitivamente el concepto de derivada lateral, tanto finita como infinita. En el punto x_1 tenemos $f'_+(x_1) = -\infty$, en x_2 se verifica $f'_-(x_2) = 0$ y $f'_+(x_2) = -1$. En los otros puntos: $f'(x_3) = -\infty$, $f'_-(x_4) = -1$, $f'_+(x_4) = 1$, $f'(x_6) = +\infty$ y $f'_-(x_7) = 2$. No existe derivada por la derecha ni por la izquierda en x_5 , ya que la función no es continua en ese punto.



De la interpretación geométrica del concepto de derivada (la pendiente de la tangente a la curva en el punto estudiado) se infiere que el carácter creciente o decreciente de las funciones derivables estará relacionado con el signo de su derivada. Esto se prueba mediante el siguiente teorema.

Teorema 62 Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que en $c \in (a, b)$ se tiene que $f'(c) > 0$, o $f'(c) = +\infty$. Entonces existe una bola unidimensional (intervalo), $B(c) \subseteq (a, b)$, en la que

$$f(x) > f(c) \text{ si } x > c, \quad \text{y} \quad f(x) < f(c) \text{ si } x < c$$

Por lo tanto $f(x)$ es creciente en esa bola.

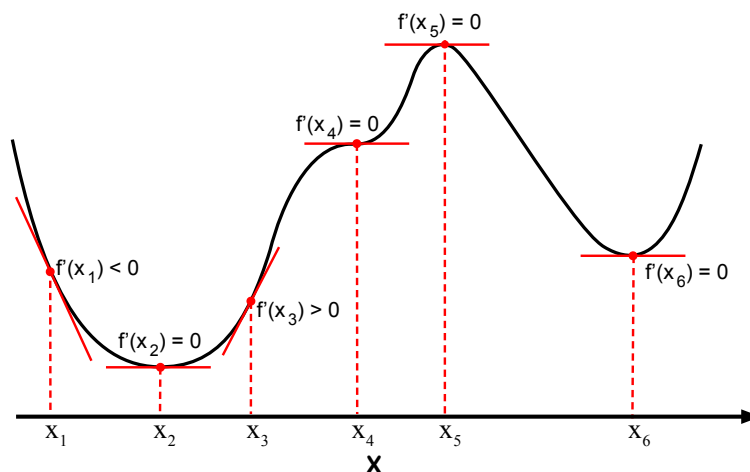
Demostración: Supongamos, en primer lugar, que $f'(c)$ es finita y positiva. Entonces sabemos que existe una función, f^* , que verifica $f(x) - f(c) = (x - c)f^*(x) \forall x \in (a, b)$, es continua en c y $f^*(c) = f'(c) > 0$. Por la propiedad de conservación del signo de las funciones continuas podemos afirmar que existe una bola centrada en c , $B(c) \subseteq (a, b)$, donde $f^*(x)$ tiene el mismo signo que $f^*(c) = f'(c) > 0$ para cada $x \in B(c)$, por lo tanto $f^*(x) > 0 \forall x \in B(c)$, y esto significa que $f(x) - f(c)$ tiene el mismo signo que $(x - c)$ en esa bola, es decir, $f(x)$ es creciente.

En el caso de que $f'(c) = \infty$, ello quiere decir que $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = +\infty$ y que por lo tanto la cantidad $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ se hace tan grande como uno quiera cuando $x \rightarrow c$. En particular, podremos encontrar una bola unidimensional, $B(c)$, en la que $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 1$ para cada $x \in B(c)$, $x \neq c$, lo que nuevamente implica que $f(x) - f(c)$ tiene el mismo signo que $(x - c)$ en esa bola y por lo tanto es creciente. Se puede enunciar un teorema análogo cuando la función satisface las condiciones $f'(c) < 0$, o $f'(c) = -\infty$, en cuyo caso se demuestra que $f(x)$ es decreciente. Si la derivada se anula en $x = c$, entonces la función tiene un extremo local (máximo o mínimo) en ese punto, concepto que definiremos a continuación.

Definición 67 (Máximo local). Sea f una función real definida en un subconjunto S de un espacio métrico M , y supongamos que $a \in S$. Entonces f posee un máximo local (o relativo) en a si existe una bola $B(a)$ tal que $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in B(a) \cap S$. Si $f(x) \geq f(a)$ para todo $x \in B(a) \cap S$, entonces f posee un mínimo local (o relativo) en a .

Nótese que un máximo local en a es el máximo absoluto de f en el subconjunto $B(a) \cap S$ del conjunto S . Si f tiene un máximo absoluto de S en a (es decir, $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in S$) entonces, obviamente, tiene también un máximo local en a . El recíproco no es cierto, f puede poseer varios máximos locales en varios puntos de S sin que posea máximo absoluto en el conjunto S .

En la siguiente figura se ilustra la relación entre el signo de la derivada de una función y su gráfica, utilizando los resultados demostrados hasta el momento correspondientes al crecimiento y decrecimiento y anticipando los que vamos a ver a continuación sobre máximos y mínimos locales. En los puntos x_2 , x_5 y x_6 la pendiente es cero y tenemos extremos relativos (máximos o mínimos). En x_1 la función es decreciente y la pendiente negativa y en x_3 sucede lo contrario. En x_4 la pendiente es nula, pero la función no alcanza ahí ni un máximo ni un mínimo. Se dice que $f(x)$ presenta en x_4 un punto de inflexión (definiremos con más rigor este concepto al final del tema).



Teorema 63 (del extremo relativo o de Fermat). Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que f tiene un máximo local o un mínimo local en un cierto punto interior $c \in (a, b)$. Si f posee derivada en c , entonces debe ocurrir que $f'(c) = 0$.

Demostración: Si $f'(c)$ fuese positiva o $+\infty$ entonces, en virtud del teorema 62, f no podría tener un extremo local en c porque sería estrictamente creciente. Análogamente, $f'(c)$ no puede ser negativa ni $-\infty$ en c , porque ello significaría que es estrictamente decreciente en c . Puesto que existe derivada en c , la única posibilidad que queda es $f'(c) = 0$.

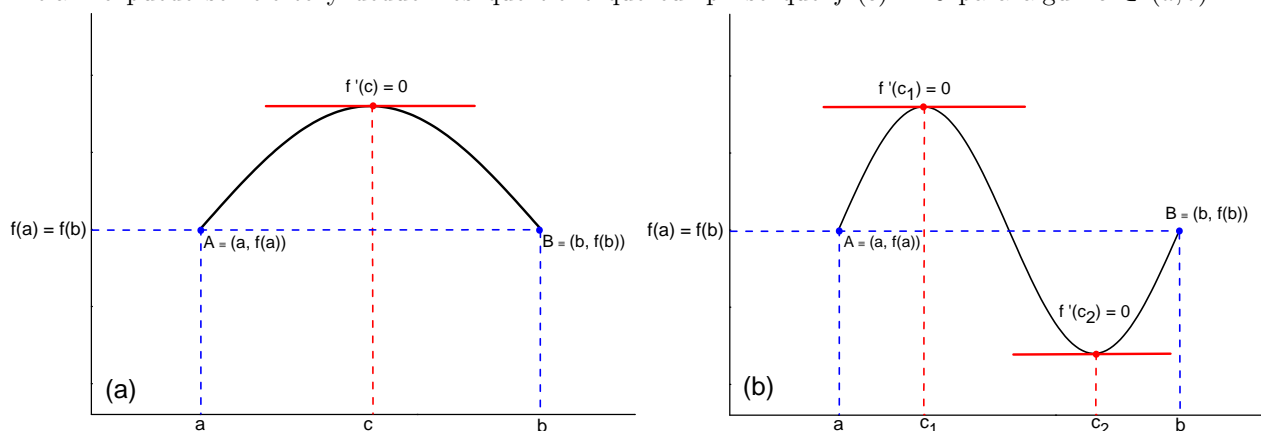
Nótese que la condición $f'(c) = 0$ no es necesaria ni suficiente para afirmar que f tiene un extremo en c . Un ejemplo de que no es suficiente lo tenemos en la función $f(x) = x^3$, que cumple $f'(0) = 0$ pero carece de extremos y es creciente en todo entorno de $x = 0$. Por otro lado, el enunciado del teorema indica que éste se aplica sólo si existe derivada en c , de modo $f(x)$ puede tener un extremo local en c sin que exista $f'(c)$ y sea igual a 0. Esto es lo que ocurre para $f(x) = |x|$, que tiene un mínimo (local y absoluto) en $x = 0$ pero carece de derivada en ese punto. Obsérvese además que este teorema se aplica a un punto interior de intervalo abierto (a, b) . Esto es importante, porque en el ejemplo trivial de la función $f(x) = x$ en el intervalo cerrado $[a, b]$ se alcanza el máximo y el mínimo en los puntos extremos, pero $f'(x)$ no es cero para ningún punto de $[a, b]$.

El siguiente teorema prueba el resultado geoméricamente evidente de que si una función tiene el mismo valor en los extremos del intervalo $[a, b]$ (esto es, $f(a) = f(b)$) y es derivable (y por lo tanto es continua), entonces su derivada debe anularse en algún punto intermedio comprendido entre a y b , pues debe haber al menos un punto de “viraje” entre a y b . Un caso particular es cuando $f(a) = f(b) = 0$ y la curva corta al eje x en esos puntos.

Teorema 64 (de Rolle). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que f posee derivada (finita o infinita) en cada uno de los puntos del intervalo abierto (a, b) , y supongamos también que f es continua en los puntos extremos, a y b . Si $f(a) = f(b)$, entonces existe por lo menos un punto interior, c , en el que $f'(c) = 0$.

Demostración: Aplicaremos el método de reducción al absurdo. Supongamos que f' no es cero en ningún punto de (a, b) y llegaremos a una contradicción.

Como f es continua en el compacto $[a, b]$, por el teorema 49 podemos afirmar que alcanza su máximo M y su mínimo m en algún punto de $[a, b]$. Estos valores extremos no pueden alcanzarse en un punto interior $c \in (a, b)$, pues de lo contrario, aplicando el teorema anterior (del extremo relativo o de Fermat), deduciríamos que $f'(c) = 0$ y llegaríamos a una contradicción. Hemos de concluir entonces que el máximo y el mínimo de f se alcanzan en a y b . Por hipótesis del teorema tenemos $f(a) = f(b)$, luego ha de cumplirse que $M = m$ y, por consiguiente, f es constante en $[a, b]$. Esto contradice nuevamente el supuesto inicial de que f' no es cero en ningún punto de (a, b) , por lo tanto ese supuesto inicial no puede ser cierto y deducimos que tiene que cumplirse que $f'(c) = 0$ para algún $c \in (a, b)$.



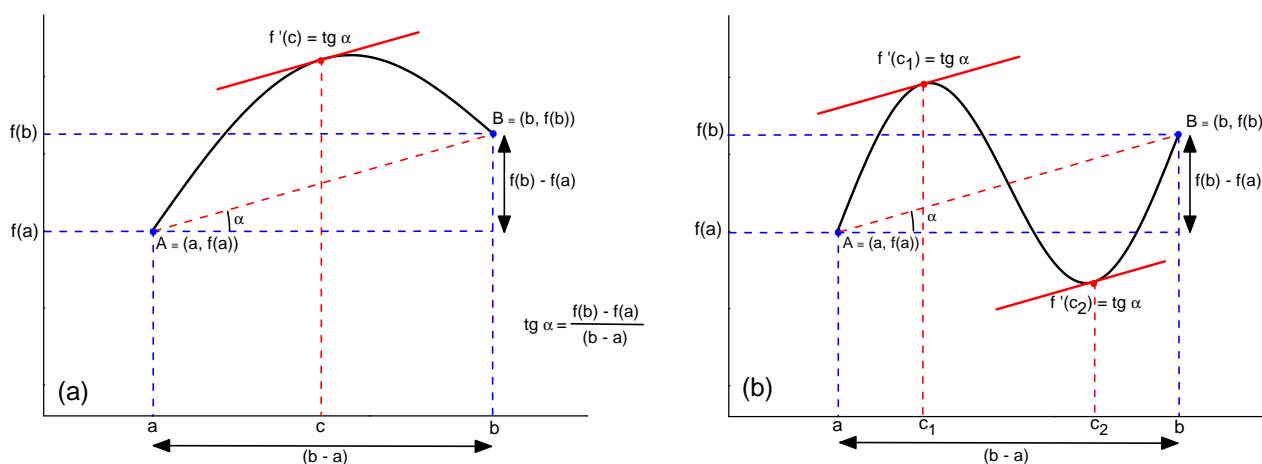
Interpretación geométrica del teorema de Rolle: Si f cumple las condiciones del teorema y $f(a) = f(b)$, entre ambos puntos tiene que haber un máximo o un mínimo [figura (a)], pero puede haber más [figura (b)].

Teorema 65 (de los incrementos finitos o del valor medio de Lagrange). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función con derivada (finita o infinita) en cada uno de los puntos del intervalo abierto (a, b) , y que además es continua en los extremos a y b . Entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Nota: Aunque ya lo hemos demostrado, este teorema incluye el teorema anterior (de Rolle) como un caso particular que se obtiene cuando $f(a) = f(b)$.

Dado que $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A \equiv (a, f(a))$ y $B \equiv (b, f(b))$, la interpretación geométrica de este teorema (que probaremos a partir del siguiente teorema de Cauchy) es que una curva suficientemente regular (esto es, derivable) que una a esos dos puntos posee por lo menos una tangente con la misma pendiente que la recta que pasa por los mismos, tal y como se muestra en el apartado (a) de la siguiente figura. La figura (b) ilustra que puede tener más de una.



Teorema 66 (de Cauchy o del valor medio generalizado). Sean f y g dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables (con derivada finita o infinita) en (a, b) . Supongamos además que no existe ningún punto $x \in (a, b)$ en el que $f'(x)$ y $g'(x)$ sean ambas infinitas. Entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ para el que se verifica

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$$

(Nótese que cuando $g(x) = x$ obtenemos el teorema 65 anterior). Supongamos además que se cumple alguna de las dos condiciones siguientes:

- (a) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
- (b) $g(b) \neq g(a)$ y tanto $f'(x)$ como $g'(x)$ no se anulan simultáneamente para ningún $x \in (a, b)$.

Entonces la conclusión anterior se puede expresar también mediante la fórmula del valor medio de Cauchy, es decir, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Demostración: A partir de f y g definimos la función $h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$. Así construida, su derivada $h'(x) = f'(x)[g(b) - g(a)] - g'(x)[f(b) - f(a)]$ es finita si $f'(x)$ y $g'(x)$ son finitas, y es infinita si alguna de estas dos últimas son infinitas (la hipótesis del teorema excluye que ambas sean infinitas en el mismo x , lo cual podría originar una indeterminación). Además, $h(x)$ es continua en los extremos a y b y, como vamos a comprobar a continuación, toma el mismo valor en ambos [esto es, $h(a) = h(b)$]:

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a)[g(b) - g(a)] - g(a)[f(b) - f(a)] = \\ &= f(a)g(b) - \cancel{f(a)g(a)} - g(a)f(b) + \cancel{g(a)f(a)} = f(a)g(b) - g(a)f(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(b) &= f(b)[g(b) - g(a)] - g(b)[f(b) - f(a)] = \\ &= \cancel{f(b)g(b)} - f(b)g(a) - \cancel{g(b)f(b)} + g(b)f(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) \end{aligned}$$

En consecuencia, podemos aplicar el teorema de Rolle (teorema 64) a la función $h(x)$ y afirmar que existe al menos un punto interior $c \in (a, b)$ en el que $h'(c) = f'(c)[g(b) - g(a)] - g'(c)[f(b) - f(a)] = 0$, lo cual completa la demostración de la primera parte del teorema.

La fórmula del valor medio de Cauchy (esto es, la segunda parte del teorema) se obtiene a partir de la primera parte del teorema si se garantiza que los denominadores de esa fórmula no se anulan. Demostraremos a continuación que esto queda asegurado si se cumplen cualquiera de las dos condiciones, (a) o (b), del teorema.

Supongamos primero (a), es decir, $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Esto ya nos garantiza que $g'(c) \neq 0$. Pero, además, las hipótesis del teorema también nos dicen que $g(x)$ verifica las condiciones del teorema 65 (que se deduce de la primera parte de éste) lo que nos asegura que existe un $d \in (a, b)$ para el cual $g(b) - g(a) = g'(d)(b - a)$. Como estamos suponiendo que $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ (incluyendo a d) también $g(b) - g(a) \neq 0$ y se garantiza que ninguno de los denominadores de la fórmula de Cauchy se anula.

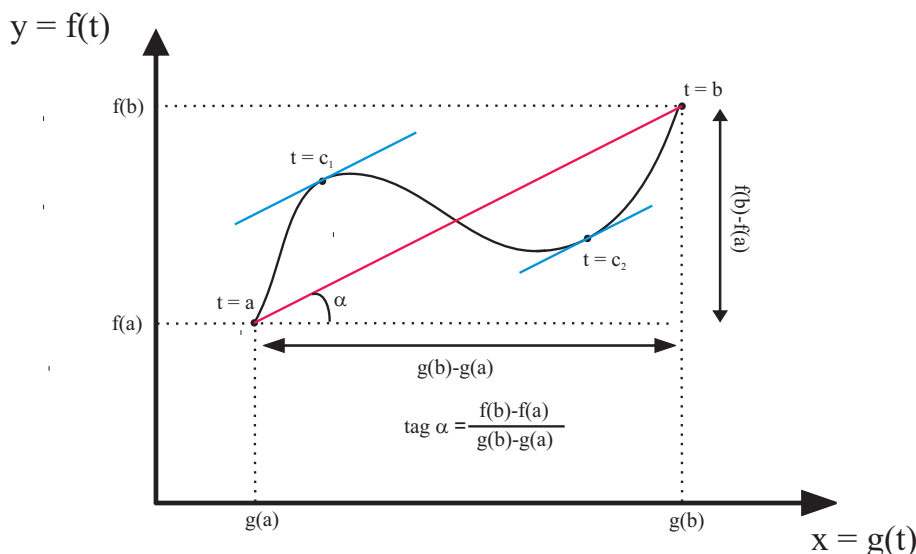
Supongamos ahora (b), es decir, $g(b) \neq g(a)$ y tanto $f'(x)$ como $g'(x)$ no se anulan simultáneamente para ningún $x \in (a, b)$. Por una parte ya sabemos directamente que $g(b) - g(a) \neq 0$. Por otra parte, también debe ser $g'(c) \neq 0$. De lo contrario, como $g(b) \neq g(a)$, la ecuación $f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$ solo se verificaría si $f'(c) = 0$, lo cual contradice la segunda parte de la hipótesis (b), esto es, que ambas derivadas no se anulan simultáneamente en ningún punto de (a, b) .

Interpretación geométrica: A continuación ilustraremos que la interpretación geométrica del teorema del valor medio generalizado es la misma que la del teorema del valor medio convencional, pero generalizada a una curva en el plano xy definida de forma paramétrica. Esto último quiere decir que dicha curva no se obtiene a partir de una función que ligue directamente a la variable x con la y , sino que éstas se relacionan indirectamente a través de una tercera variable, que llamaremos t , mediante dos ecuaciones paramétricas $x = g(t)$ e $y = f(t)$ con $a \leq t \leq b$. Así, al dar valores a t , obtenemos los pares de puntos (x, y) que forman la curva.

Lo que nos dice la fórmula de Cauchy que se deriva del teorema del valor medio generalizado es que esta curva definida de forma paramétrica tiene al menos una tangente en un punto interior a (a, b) cuya pendiente coincide con la de la recta que une los puntos $(g(a), f(a))$ y $(g(b), f(b))$, es decir, con el cociente $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. Esto resulta intuitivo desde un punto de vista geométrico (ver figura). Para demostrarlo algebraicamente hemos de recordar, en primer lugar, que la fórmula de Cauchy nos dice que dicho cociente es igual a $f'(c)/g'(c)$ para al menos un $c \in (a, b)$. En segundo lugar, hemos de tener en cuenta que esta última cantidad coincide con la derivada de la curva en dicho punto c , esto es con $\left. \frac{dy}{dx} \right|_c$. Esto se puede comprobar fácilmente aplicando la regla de la cadena y la la regla de derivación de la función inversa combinadas con la notación de Leibniz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

Está claro entonces que la derivada de la curva $y(x)$ en el punto c , y por lo tanto la pendiente de la recta tangente en dicho punto es $y'(c) = f'(c)/g'(c)$.



Interpretación geométrica del teorema del valor medio generalizado: El teorema del valor medio generalizado puede ser interpretado, como su propio nombre indica, como una generalización del teorema del valor medio al caso de curvas definidas de forma paramétrica en el plano xy . De hecho, si $x = g(t) = t$ se recupera trivialmente el teorema del valor medio original.

4.8. Regla de L'Hopital.

El teorema del valor medio generalizado de Cauchy permite obtener una regla para el cálculo de límites indeterminados cuando tenemos entre manos funciones que son continuas y derivables. Es la denominada regla de L'Hopital, útil para calcular el límite de un cociente $f(x)/g(x)$ en el que el numerador y el denominador tienden a cero.

Teorema 67 (regla de L'Hopital para $0/0$). Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones reales de variable real que admiten derivadas en cada punto x de un intervalo abierto (a, b) tales que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$$

Supongamos también que $g'(x) \neq 0$ para cada $x \in (a, b)$. Entonces si existe el

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \quad \text{también existe el } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ y es igual a } L$$

Nótese que en este teorema no se establecen hipótesis sobre las funciones f y g , ni sobre sus derivadas, en el punto $x = a$ (no tienen que ser continuas, etc.). Basta suponer que $f(x)$ y $g(x)$ tienden a cero cuando $x \rightarrow a^+$ y que el cociente $f'(x)/g'(x)$ tiende a un límite finito cuando $x \rightarrow a^+$. La regla de L'Hopital nos dice entonces que el cociente $f(x)/g(x)$ tiende al mismo límite. Además, la regla puede aplicarse sucesivamente, esto es, si nos encontramos que al derivar numerador y denominador $f'(x)$ y $g'(x)$ tienden a cero cuando $x \rightarrow a^+$ verificando el resto de condiciones del teorema, podemos aplicar la regla nuevamente y estudiar el límite del cociente $f''(x)/g''(x)$. Si ese límite existe coincidirá con el de $f'(x)/g'(x)$ y, por lo tanto, también con el de $f(x)/g(x)$. El razonamiento es aplicable al cociente de las derivadas de orden superior.

Por otra parte, aunque los límites establecidos en este teorema son “por la derecha”, es obvio que existe un teorema similar en el que los límites se toman por la izquierda. Combinando los dos teoremas podríamos formular uno en el que los límites se toman por ambos lados. De todos modos, la consideración de límites laterales es útil para indicar que la regla de L'Hopital también se puede aplicar, aún cuando no exista alguno de los límites laterales, en el lado en el que sí existe (ver ejercicio 18, apartados d y f).

Finalmente, es necesario destacar que la regla de L'Hopital es una técnica más para el cálculo de límites, pero no debe utilizarse como método por defecto. La derivación de funciones da lugar muy a menudo a funciones más complejas que las originales y en las que los límites son más difíciles de determinar.

Además, es importante comprender bien el enunciado de la regla, bajo que condiciones es aplicable y a que conclusiones permite llegar. Un error muy frecuente, por ejemplo, es no darse cuenta de que la regla de L'Hopital dice que el límite de $f(x)/g(x)$ coincide con el de $f'(x)/g'(x)$ siempre y cuando este último exista. Si no es así, nada puede concluirse sobre el límite de $f(x)/g(x)$.

Demostración: Sea entonces un punto $x \in (a, b)$. Haremos uso de la fórmula del valor medio de Cauchy (teorema 66) aplicada al intervalo cerrado $[a, x]$. Puesto que por hipótesis del teorema las funciones f y g pueden no estar definidas en a , en primer lugar introducimos dos nuevas funciones que *sí estén* definidas en a :

$$\begin{aligned} F(t) &= f(t) & \text{si } t \neq a, & & F(a) &= 0, \\ G(t) &= g(t) & \text{si } t \neq a, & & G(a) &= 0. \end{aligned}$$

Nótese que F y G son continuas en a , puesto que la hipótesis de partida es que $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} g(t) = 0$ (es indiferente que la variable del límite sea x o t). Ambas son además continuas en el intervalo cerrado $[a, x]$ y tienen derivada en todos los puntos del intervalo abierto (a, x) . Verifican pues en ese intervalo todas las condiciones del teorema del valor medio generalizado, por lo que podemos afirmar que existe $c \in (a, x)$ tal que

$$[F(x) - F(a)]G'(c) = [G(x) - G(a)]F'(c)$$

Recordando que $F(a) = G(a) = 0$ y que $F(x) = f(x)$, $G(x) = g(x)$ si $x \neq a$ esa expresión se convierte en

$$f(x)g'(c) = g(x)f'(c)$$

Por hipótesis g' no se anula en ningún punto de (a, b) , por lo tanto $g'(c) \neq 0$. Además también se cumple que $g(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$, de lo contrario ocurriría que en algún punto $g(x) = G(x) = G(a) = 0$ y, en virtud del teorema de Rolle, existiría un punto x_1 entre a y x en el que $G'(x_1) = g'(x_1) = 0$, en contradicción con la hipótesis de que g' no se anula en ningún punto de (a, b) . Podemos dividir entonces por $g'(c)$ y por $g(x)$ y obtener

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Cuando $x \rightarrow a$ también $c \rightarrow a$ puesto que c es un punto que pertenece a (a, x) . Por lo tanto a partir de la expresión anterior podemos establecer lo siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L$$

Tal y como pretendíamos demostrar.

Obsérvese que indeterminaciones del tipo ∞/∞ o $0 \cdot \infty$ pueden convertirse en indeterminaciones del tipo $0/0$ usando las correspondientes funciones recíprocas, y así podemos aplicar la regla de L'Hopital a estos casos. Por otra parte, es evidente que esta regla se puede aplicar recursivamente en caso de que persista la indeterminación, siempre que las sucesivas funciones derivadas cumplan las condiciones del teorema. Las indeterminaciones del tipo 1^∞ a veces se pueden transformar, utilizando la función logarítmica, en indeterminaciones $0 \cdot \infty$ donde, a través de las funciones recíprocas, también se puede usar la regla de L'Hopital. Algo parecido sucede con las indeterminaciones 0^0 si se utiliza la función exponencial (ver ejercicio 18, apartado f).

Ejemplo: Algunos límites que hemos tenido que calcular a lo largo de este tema

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \log(a)}{1} = \log(a)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\log(1+x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$$

4.9. Fórmula de Taylor con resto.

Hemos visto que una de las implicaciones que tiene el hecho de que una función f sea diferenciable en un punto c es que en las cercanías de ese punto [es decir, cuando $(x - c)$ es pequeño] se puede aproximar mediante el polinomio de grado uno (o recta) $f(x) \simeq f(c) + f'(c)(x - c)$. La precisión de esa aproximación dependerá mucho de si la función f se parece mucho a una recta en las inmediaciones de c , y si no es así sólo será efectiva para valores de x extremadamente cercanos a c .

Una forma de mejorar esa aproximación sería utilizar un polinomio de grado dos. De este modo obtendríamos una buena aproximación a f en las inmediaciones de c no sólo si cerca de ese punto su comportamiento es lineal, sino también cuando es parabólico. Por lo tanto, está claro que incrementando el grado de ese polinomio podemos aumentar la precisión de la aproximación y extenderla a más tipos de comportamientos de f en las cercanías de c . Trabajar con polinomios es particularmente útil en análisis numérico, pues sus valores en un punto se pueden obtener efectuando un número finito de multiplicaciones y adiciones que son muy fáciles de programar, algo que no ocurre necesariamente para otras funciones más complejas. Además, en física, muchas veces sólo nos interesa estudiar el comportamiento de un observable en las cercanías de un punto concreto (un mínimo de energía, por ejemplo). Utilizar para ello un polinomio en lugar de la función que describa a ese observable, que puede ser muy complicada, facilita la tarea.

Supongamos entonces que tenemos una función $f(x)$ y la queremos aproximar mediante un polinomio $P(x)$ de grado n en el entorno de un punto c que, por simplicidad, vamos a considerar como $c = 0$. De forma genérica podríamos escribir ese polinomio como [si fuese $c \neq 0$ haríamos el cambio $x \rightarrow (x - c)$]:

$$P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n = \sum_{k=0}^n c_k x^k ,$$

Donde los c_k son un conjunto de coeficientes por determinar.

Si queremos que ese polinomio sea una aproximación de $f(x)$ en las cercanías de 0, parece lógico empezar por exigirle que en ese punto se comporte como f . Ello implica, en primer lugar, que valgan lo mismo en ese punto, es decir que $P(0) = f(0)$. Sabemos además que la gráfica de una función se relaciona directamente con sus derivadas. Por lo tanto, si queremos que $P(x)$ se comporte como $f(x)$ cerca del cero 0, también sus derivadas en ese punto deberían de coincidir. Dicho de otro modo, si f es derivable hasta por lo menos el orden n (el grado de nuestro polinomio), debería de verificarse que:

$$P(0) = f(0), \quad P'(0) = f'(0), \quad P^{(2)}(0) = f^{(2)}(0), \quad \dots \quad P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

Sustituyendo los valores de P y de sus sucesivas derivadas en 0 en estas ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} P(0) &= c_0 = f(0), & P'(0) &= c_1 = f'(0), & P^{(2)}(0) &= 2 \cdot c_2 = f^{(2)}(0), \\ P^{(3)}(0) &= 3 \cdot 2 \cdot c_3 = f^{(3)}(0), & P^{(4)}(0) &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot c_4 = f^{(4)}(0), & \text{y en general:} \\ P^{(k)}(0) &= k! \cdot c_k = f^{(k)}(0), & \text{esto es,} & & c_k &= \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos escribir nuestro polinomio como:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

A esta aproximación se la conoce como *polinomio de Taylor generado por la función f en el punto $x = 0$* .

¿Qué error se comete cuando se aproxima una función mediante este polinomio de Taylor de grado n construido a partir de sus derivadas? Evidentemente, dependerá del grado del polinomio, del punto alrededor del cual lo estemos calculando y de la función en cuestión. El siguiente teorema, que ya está formulado para un punto genérico $x = c$ en lugar de $x = 0$, responde a esa pregunta y da una expresión concreta para el error (también llamado *resto*) que se comete cuando se aproxima la función por su polinomio de Taylor de grado n . Además, también nos va a permitir más adelante extender la relación entre la gráfica de una función en el entorno de un punto y sus derivadas en ese punto (que hasta ahora sólo hemos estudiado para la primera derivada) a las derivadas de orden n .

Teorema 68 (de Taylor). Sea f una función que admite derivada n -ésima $f^{(n)}$ finita en todo el intervalo abierto (a, b) y supongamos que $f^{(n-1)}$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Sea $c \in [a, b]$. Entonces para todo $x \in [a, b]$, $x \neq c$, existe un punto x_1 interior al intervalo que une x con c tal que.

$$f(x) = f(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x-c)^n =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k}_{P_{n-1}(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x-c)^n}_{R_n(x)}$$

El segundo sumando, R_n , representa el error o resto que se comente al aproximar la función mediante el polinomio de grado $n-1$ del primer sumando, P_{n-1} . Esta fórmula se conoce como fórmula de Taylor.

Demostración: Consideremos entonces, como dice el enunciado del teorema, un $c \in [a, b]$. Sea también $x \in [a, b]$, $x \neq c$ que, para simplificar, supondremos tal que $c < x$ (la demostración es análoga suponiendo lo contrario). Entonces tenemos también que $c < x < b$ pues b es el extremo superior del intervalo $[a, b]$. Manteniendo c y x fijos, definimos en primer lugar la cantidad M como:

$$M = \frac{f(x) - P_{n-1}(x)}{(x-c)^n}$$

Nótese que, dado que c y x son puntos fijos, M será una constante. Además, si comparamos la definición de M con la fórmula de Taylor que acabamos de escribir, si conseguimos demostrar que $M = \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}$, con $x_1 \in (c, x)$, habremos demostrado el teorema.

A continuación, dentro del intervalo $[c, x]$, a cuyos puntos llamaremos t , definimos la siguiente función $g : [c, x] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$g(t) = f(t) - P_{n-1}(t) - M \cdot (t-c)^n$$

Obsérvese que en el punto x la función g se anula, esto es $g(x) = 0$. Para comprobarlo basta con sustituir $t = x$ y M por su definición. Pero, además, también $g(c) = 0$, pues por construcción $P_{n-1}(c) = f(c)$ y el tercer sumando en la definición de $g(t)$ se anula. Aplicando el teorema de Rolle podemos afirmar que existe un punto interior al intervalo que une a c con x , esto es $\exists a_1 \in [c, x]$, tal que $g'(a_1) = 0$.

Ahora, para continuar la demostración, tenemos que darnos cuenta de que no solo $g(c) = 0$, si no que todas sus sucesivas derivadas en dicho punto también se anulan hasta orden $n-1$, esto es, $g^{(j)}(c) = 0$ si $j \leq n-1$. Para comprender porqué comenzamos analizando el tercer sumando en la definición de $g(t)$. Al ser una constante multiplicada por la potencia $(t-c)^n$, si derivamos menos de n -veces dicha potencia no se degrada por completo y al sustituir $t = c$ el resultado es cero. Podemos decir entonces que $g^{(j)}(c) = f^{(j)}(c) - P_{n-1}^{(j)}(c)$, pero recordemos que los coeficientes del polinomio se escogen de tal forma sus derivadas coincidan con las de f en c hasta el orden $n-1$. Por lo tanto $g^{(j)}(c) = 0$ desde $j = 0$ hasta $j = n-1$. Este resultado podemos comprobarlo también de un modo más cuantitativo a partir de la forma genérica de $g^{(j)}(t)$ que podemos inferir derivando sucesivamente:

$$g(t) = f(t) - P_{n-1}(t) - M \cdot (t-c)^n = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (t-c)^k - M \cdot (t-c)^n$$

$$g^{(1)}(t) = f^{(1)}(t) - \sum_{k=1}^{n-1} k \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (t-c)^{k-1} - n M \cdot (t-c)^{n-1}$$

$$g^{(2)}(t) = f^{(2)}(t) - \sum_{k=2}^{n-1} k(k-1) \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (t-c)^{k-2} - n(n-1) M \cdot (t-c)^{n-2}$$

$$g^{(3)}(t) = f^{(3)}(t) - \sum_{k=3}^{n-1} k(k-1)(k-2) \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (t-c)^{k-3} - n(n-1)(n-2) M \cdot (t-c)^{n-3}$$

...

$$g^{(j)}(t) = f^{(j)}(t) - \sum_{k=j}^{n-1} \frac{k!}{(k-j)!} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (t-c)^{k-j} - \frac{n!}{(n-j)!} M \cdot (t-c)^{n-j}$$

Es claro que para $t = c$ el último término se anula y en el sumatorio sobre k (que representa un polinomio) solo sobrevive el término independiente, que se corresponde al primer sumando $k = j$ y que coincide con $f^{(j)}(c)$. Por lo tanto, en efecto, $g^{(j)}(c) = 0$ desde $j = 0$ hasta $j = n - 1$.

Llegados a este punto, retomamos el hecho de que $\exists a_1 \in [c, x]$, tal que $g'(a_1) = 0$. Como también $g'(c) = 0$, aplicamos el teorema de Rolle sobre la función g' y afirmamos que $\exists a_2 \in [c, a_1]$ tal que $g^{(2)}(a_2) = 0$. Como también $g^{(2)}(c) = 0$, volvemos a aplicar el teorema de Rolle y afirmamos que $\exists a_3 \in [c, a_2]$ tal que $g^{(3)}(a_3) = 0$. Procediendo de forma sucesiva, llegaríamos a que como $g^{(n-1)}(a_{n-1}) = 0$ y también $g^{(n-1)}(c) = 0$, entonces $\exists x_1 \in [c, a_{n-1}]$ tal que $g^{(n)}(x_1) = 0$. Ahora bien, si derivamos $g(t)$ n -veces lo que obtenemos es:

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - M \cdot n!$$

debido a que el grado de $P_{n-1}(t)$ es menor que n y por lo tanto hemos degradado por completo ese polinomio y a que en el tercer sumando hemos derivado tantas veces como la potencia que tenemos en t . Como $g^{(n)}(x_1) = 0$, sustituyendo:

$$g^{(n)}(x_1) = 0 = f^{(n)}(x_1) - M \cdot n! \implies M = \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}$$

que era lo que queríamos demostrar.

4.10. Estudio local de la gráfica de una función.

Teorema 69 Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un entorno I de un punto $a \in \mathbb{R}$. Consideremos la gráfica de f en ese entorno, dada por la curva de ecuación $y = f(x)$.

- (a) Si f es derivable en a , para que $y = f(x)$ tenga un extremo relativo (máximo o mínimo) en el punto a es necesario que sea $f'(a) = 0$.
- (b) Si $f'(a) > 0$ entonces f es creciente en a . Si $f'(a) < 0$, f es decreciente en a .
- (c) Si f es n veces derivable en a y se verifica que $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, y $f^{(n)}(a) \neq 0$, entonces, según la paridad de n y el signo de $f^{(n)}(a)$, se tiene lo siguiente:
- Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en a .
 - Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en a .
 - Si n es impar y $f^{(n)}(a) > 0$, entonces f es estrictamente creciente en a .
 - Si n es impar y $f^{(n)}(a) < 0$, entonces f es estrictamente decreciente⁵ en a .

⁵Se suele usar el término *estrictamente monótona* para indicar que una función es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Demostración:

- (a) Aunque esto ya lo hemos demostrado en los teoremas 62 y 63, repitamos aquí el razonamiento. Supongamos que el extremo relativo que f alcanza en a es un mínimo. Entonces existe un entorno J de a en el que se verifica $f(x) \geq f(a) \forall x \in J$. Por lo tanto, para un punto x cualesquiera de este entorno tendremos:

$$\text{Si } x < a, \text{ entonces } \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0, \text{ por lo tanto, } \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

$$\text{Si } x > a, \text{ entonces } \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0, \text{ por lo tanto, } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

Por hipótesis del teorema sabemos que la derivada existe en $x = a$, lo cual quiere decir que esos dos límites laterales coinciden. La única opción posible para eso es que sean nulos, y por lo tanto la derivada es cero. En el caso de que f alcance un máximo relativo en a razonaríamos de manera similar. Con ello queda demostrado que $f'(a) = 0$ es una condición necesaria para que f tenga un extremo relativo en a siempre y cuando sea derivable en ese punto.

- (b) Pasamos ahora a demostrar la relación entre crecimiento y decrecimiento y el signo de la derivada. Supongamos ahora que $f'(a) > 0$. Eso quiere decir que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, con lo cual podemos afirmar que “cerca de a ” (esto es, en un entorno de ese punto) tiene que verificarse que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} >$

0. Ello implica que $f(x) - f(a)$ y $(x - a)$ tienen el mismo signo en ese entorno de “ a ” y por lo tanto se verifica que:

$$x < a \implies f(x) < f(a) \quad \text{y} \quad x > a \implies f(x) > f(a).$$

En otras palabras, f es estrictamente creciente en el punto $x = a$. En el caso de que $f'(a) < 0$ razonaríamos de forma similar.

(c) La función f verifica las hipótesis del teorema de Taylor (teorema 68) en $x = a$. Aplicando ese teorema obtenemos la siguiente fórmula de Taylor con resto centrada en ese punto:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x-a)^n$$

Donde x_1 pertenece al intervalo que une x y a , es decir, $x_1 \in (x, a)$ o $x_1 \in (a, x)$. Dado que las $n-1$ primeras derivadas de f son nulas, esta expresión se simplifica en:

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x-a)^n$$

Por lo tanto, $f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x-a)^n$, lo que en particular implica que las expresiones $f(x) - f(a)$ y $\frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x-a)^n$ tienen el mismo signo. Por otra parte, dado que $f^{(n)}(a) \neq 0$, debe de existir un entorno de a , por pequeño que sea y que llamaremos $B(a)$, en el cual $f^{(n)}$ conserva su signo. Si hacemos que x tienda a a hasta conseguir que el intervalo (x, a) [o el (a, x) si $x > a$] esté dentro de $B(a)$, podremos afirmar que entonces el signo de $f^{(n)}(x_1)$ es igual al signo de $f^{(n)}(a)$ pues $x_1 \in (x, a)$. En consecuencia, para todo x en $B(a)$ se verificará:

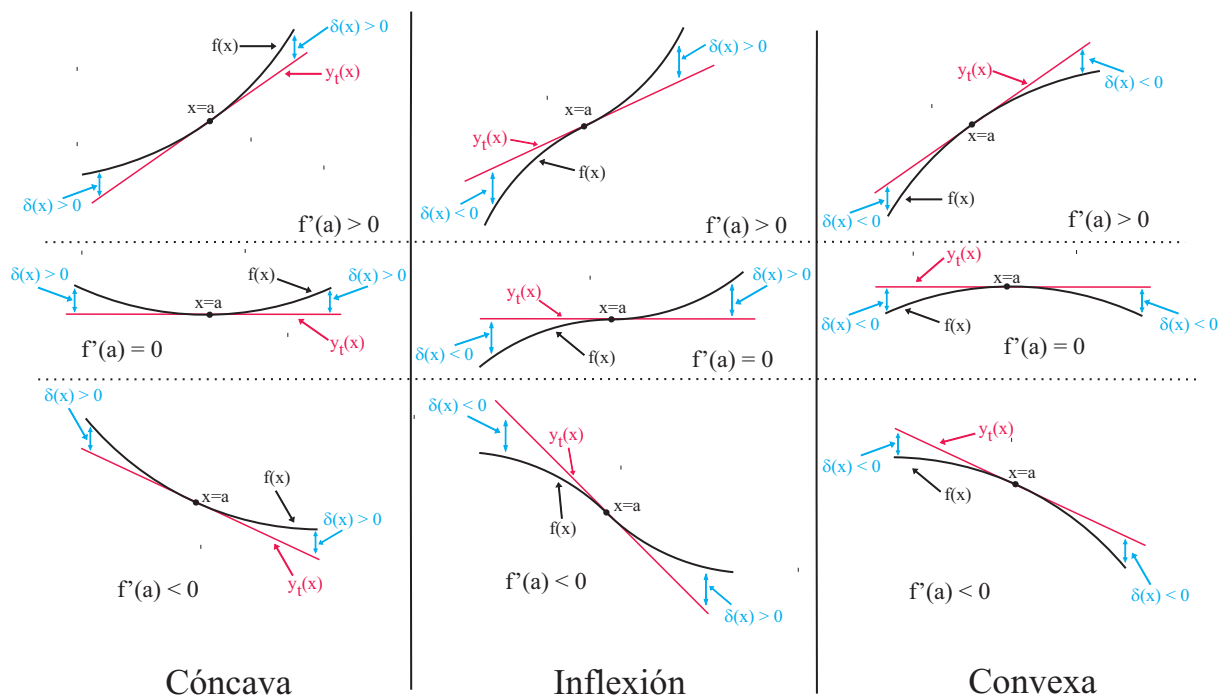
- Si n par y $f^{(n)}(a) > 0$ (es decir $f^{(n)}(x_1) > 0$), entonces $f(x) > f(a)$ en ese entorno, y por lo tanto f tiene un mínimo en a .
- Si n par y $f^{(n)}(a) < 0$ (es decir $f^{(n)}(x_1) < 0$), entonces $f(x) < f(a)$ en ese entorno, y por lo tanto f tiene un máximo en a .
- Si n impar y $f^{(n)}(a) > 0$ (es decir $f^{(n)}(x_1) > 0$), entonces $f(x) - f(a)$ es positivo si $x > a$ y negativo si $x < a$, luego $f(x)$ es creciente en a .
- Si n impar y $f^{(n)}(a) < 0$ (es decir $f^{(n)}(x_1) < 0$), entonces $f(x) - f(a)$ es negativo si $x > a$ y positivo si $x < a$, luego $f(x)$ es decreciente en a .

Definición 68 Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un entorno I de un punto $a \in \mathbb{R}$. Consideremos la gráfica de f en ese entorno, dada por la curva de ecuación $y = f(x)$. Suponemos que f es derivable en a , con lo cual f tiene una recta tangente en ese punto y viene dada por $y_t(x) = f(a) + (x-a)f'(a)$. Definimos la función $\delta(x) = f(x) - y_t(x)$ y decimos que la curva $y = f(x)$ en $x = a$:

- (a) Es cóncava si $\delta(x) > 0$ para todo x de un entorno reducido⁶ de a . Como $\delta(a) = 0$, el hecho de que $\delta(x) > 0$ en un entorno de a , equivale a decir que esta función tiene un mínimo relativo en a .
- (b) Es convexa si $\delta(x) < 0$ para todo x de un entorno reducido de a . Como $\delta(a) = 0$, el hecho de que $\delta(x) < 0$ en un entorno de a equivale a decir que esta función tiene un máximo relativo en a .
- (c) Presenta un punto de inflexión si $\delta(x) > 0$ en un semientorno⁷ reducido de a y $\delta(x) < 0$ en el semientorno opuesto. Como $\delta(a) = 0$, esto equivale a decir que esta función es monótona (creciente o decreciente) en a .

⁶Un entorno reducido de a es un intervalo abierto centrado en a al que se le ha sacado el propio punto a , es decir, el entorno reducido de radio $\epsilon > 0$ centrado en a vendría dado por el siguiente conjunto: $\{x \in \mathbb{R} ; 0 < |x - a| < \epsilon\}$. Se utiliza este concepto pues, por construcción, $\delta(x)$ representa la diferencia entre $f(x)$ y su recta tangente en el punto a . Obviamente si $x = a$, $\delta(x) = 0$.

⁷Los dos semientornos reducidos del punto a , de anchura $\epsilon > 0$, vendrían dados por los siguientes conjuntos: $I = \{x \in \mathbb{R} ; 0 < a - x < \epsilon\}$ (semientorno “izquierdo”), y $D = \{x \in \mathbb{R} ; 0 < x - a < \epsilon\}$ (semientorno “derecho”).



Interpretación geométrica de los conceptos de concavidad, convexidad y punto de inflexión: Una curva es cóncava en un punto si su recta tangente en dicho punto queda por debajo de ella. Si por el contrario dicha tangente queda por encima la curva se dice que es convexa. Si a un lado la tangente queda por debajo y al otro por encima, la curva presenta un punto de inflexión. .

Teorema 70 Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un entorno I de un punto $a \in \mathbb{R}$. Consideremos la gráfica de f en ese entorno, dada por la curva de ecuación $y = f(x)$. Si f es n veces derivable en a y se verifica $f^{(2)}(a) = f^{(3)}(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, y $f^{(n)}(a) \neq 0$, entonces, según la paridad de n y el signo de $f^{(n)}(a)$, se tiene lo siguiente:

- (a) Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, entonces f es cóncava en a .
- (b) Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, entonces f es convexa en a .
- (c) Si n es impar, entonces f presenta un punto de inflexión en a .

Demostración: En primer lugar, obsérvese que no hemos impuesto ninguna condición a la primera derivada de f en $x = a$. Si fuese $f'(a) = 0$ la demostración sería trivial: En primer lugar hay que tener en cuenta que como $f'(a) = 0$, la tangente a f en a es una constante, $y_t(x) = f(a)$, de modo que $\delta(x) = f(x) - y_t(x) = f(x) - f(a)$. Esto quiere decir que la función $\delta(x)$ tiene exactamente la misma gráfica que $f(x)$, solo que trasladada en el eje de las abscisas una cantidad $f(a)$. Por otra parte, $f(x)$ verificaría las mismas condiciones que en el teorema 69, de modo que si n fuese par y $f^{(n)}(a) > 0$ ($f^{(n)}(a) < 0$), $f(x)$ tendría un mínimo (máximo) en a que también lo sería de $\delta(x)$. Por lo tanto, $f(x)$ sería cóncava (convexa) en a . Por otra parte, si n es impar y $f^{(n)}(a) > 0$ ($f^{(n)}(a) < 0$), ello querría decir que $f(x)$, y también $\delta(x)$, es monótona creciente (decreciente) en a . Por lo tanto, $f(x)$ tendría un punto de inflexión en a .

Para la demostración en el caso general usamos la función $\delta(x)$, definida como la diferencia entre la función $f(x)$ y su recta tangente en el punto $x = a$:

$$\delta(x) = f(x) - y_t(x) = f(x) - [f(a) + (x - a)f'(a)]$$

Por construcción $\delta(x)$ es n veces derivable en a . Su primera derivada es $\delta'(x) = f'(x) - f'(a)$, con lo cual $\delta'(a) = 0$. Todas las derivadas de orden superior de δ en el punto a coinciden con las de f , es decir, $\delta^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) = 0$ para $k = 2, 3, 4, \dots, n - 1$ y $\delta^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \neq 0$. Ello quiere decir que la función δ verifica las hipótesis del teorema 69. Al aplicárselo se deduce que:

- Si n es par y $\delta^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) > 0$, entonces $\delta(x)$ tiene un mínimo relativo en a .
- (I) ■ Si n es par y $\delta^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) < 0$, entonces $\delta(x)$ tiene un máximo relativo en a .
- Si n es impar, entonces $\delta(x)$ es estrictamente monótona (creciente o decreciente) en a .

Por otro lado, de acuerdo con la definición de concavidad y convexidad podemos asegurar que

- $\delta(x)$ tiene un mínimo relativo en $a \iff f(x)$ es cóncava en a .
- (II) ■ $\delta(x)$ tiene un máximo relativo en $a \iff f(x)$ es convexa en a .
- $\delta(x)$ es estrictamente monótona en $a \iff f(x)$ tiene un punto de inflexión en a .

De (I) y (II) obtenemos lo que pretendíamos demostrar.

4.11. Ejercicios.

1. (a) Sea f una función par. Demostrar que si f es derivable en un punto a , entonces f también es derivable en $-a$, verificándose $f'(-a) = -f'(a)$.

(b) Demostrar que si f es impar y derivable en a , también es derivable en $-a$, coincidiendo ambas derivadas.

2. Sea f derivable en a . Demuestra que $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + \frac{h}{2}) - f(a - \frac{h}{2})}{h}$

3. Calcula la derivada de las siguientes funciones en el rango de valores en que existan.

(a) x^α , $x, \alpha \in \mathbb{R}^+$

(b) $\cos x$

(c) $\tan x$

(d) $\arcsin x$, $-1 \leq x \leq 1$

(e) $\arccos x$, $-1 \leq x \leq 1$

(f) $\arctan x$

4. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $f_1(x) = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{1}{a^2} \log(ax+b)$.

(d) $f_4(x) = (\tan x)^{\cos x}$.

(b) $f_2(x) = \pi^x$.

(e) $f_5(x) = \sqrt{x^x}$.

(c) $f_3(x) = \operatorname{sen}(\cos(\log x^2))$.

(f) $f_6(x) = \operatorname{arc sen} x^2$.

5. Calcula la derivada de las siguientes funciones, justificando previamente la derivabilidad:

(a) $f(x) = \arctan \sqrt{x-1} - \arcsin \sqrt{\frac{x-1}{x}}$, $x > 1$

(b) $f(x) = \log \left[\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \right]$, $0 < x < 1$

(c) $f(x) = \log \left[\cos \left[\arctan \left[\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \right] \right] \right]$, $|x| > 1$

(d) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

(e) $f(x) = x^{x^x}$, $x > 1$

(f) $f(x) = \frac{1}{2} \log \left(\tan \frac{x}{2} \right) - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

6. Estudia el rango de derivabilidad de las funciones hiperbólicas,

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x},$$

y de sus inversas, arsinh , arcosh , artanh . Calcular su derivada donde ésta exista.

7. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones:

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & \text{si } x < 0; \\ 1-x^3, & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x & \text{si } 1 < x < 2; \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases} \quad (d)$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin x^{1/3}}{x^{1/3} - \sin x}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(e)

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \sin^2(x), & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \tan^2(x), & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(f)

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x \leq 0; \\ \frac{1}{1-\sin(ax)}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

y calcula su función derivada.

Nota: Si encuentras que alguno de los límites es muy complicado, intenta un cambio de variable.

8. Sea $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida de la siguiente forma $f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 + ax + b, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

¿Puede ser $f(x)$ derivable en $x=0$? En caso afirmativo ¿para qué valores de los parámetros a y b ?

Consejo: Además del procedimiento habitual para estudiar la derivabilidad de una función en un punto, que debes conocer, observa que por la propia definición de $f(x)$ su comportamiento es distinto dependiendo de si te acercas a $x = 0$ por números racionales o irracionales. Ten en cuenta esto en cualquier límite que tengas que calcular.

9. Considérese la función $f(x) = |x|^{2k+1}$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Demostrar que f es infinitamente derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ y que, sin embargo, sólo admite un número finito de derivadas en $x = 0$. Calcular la derivada n -ésima en $x = 0$ para los valores de n en que ésta exista. Indicar para qué valores de n la derivada n -ésima es continua en $x = 0$.
10. Comprueba el teorema del valor medio para las dos funciones siguientes en los intervalos que se indican:

$$(a) f(x) = x(x-1), \quad [1, 2]$$

$$(b) f(x) = 2x + \sin x, \quad [0, \pi].$$

11. Demuestra que la ecuación $e^x = 1 + x$ sólo admite una raíz real.
12. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $3 \log x = x$?
13. Determina el número de raíces reales que tiene la ecuación $x^5 - 5x + 1 = 0$.
14. Sea $f(x) = (2-x)^m(x-3) + (3-x)^n(x-2)$, donde $n, m \in \mathbb{N}$. ¿Para qué valores de m e n se verifica que $f'(x) = 0$ en algún punto del intervalo $(2, 3)$?
15. Sea $f(x)$ una función derivable que presenta 3 máximos y 2 mínimos relativos. ¿Cuántas raíces tiene como mínimo la ecuación $f(x) = 0$? ¿Y como máximo? Razona y justifica tus respuestas.
16. Sea f una función de clase infinito en $[a, b]$ que verifica que $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$. Probar que existe un $c \in (a, b)$ tal que $f'''(c) = 0$.
17. Estudia los máximos, mínimos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y haz una gráfica aproximada de las siguientes funciones:

$$(a) f(x) = (x-1)^4(x+2)^2 \quad (b) f(x) = \frac{x}{\log x}, \quad x > 0 \quad (c) f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2} \quad (d) f(x) = x^4 e^{-x^2}$$

18. Calcular los límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{1 - \cos x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cotan(x)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right]$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\log(\sin x) + \frac{1}{x} \right]$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{x}{\cotan(x)} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right]$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sen x}{x} \right)^{1/x}$$

$$(h) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sen(n!)}{n^2 + 1}$$

19. Un hilo pesado bajo la acción de la gravedad se comporta formando una catenaria $y = a \cosh(x/a)$, $a > 0$. Demostrar que, para valores pequeños de x , la forma del hilo puede representarse aproximadamente por la parábola $y = a + \frac{x^2}{2a}$.

20. Busca el mínimo orden del polinomio de Taylor que puede aproximar el $\log 2$ con al menos cuatro cifras decimales exactas.
21. Sea $f(x) = \sin^2(x) + \frac{1}{\cot^2(x)}$. ¿Es $2x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{19x^6}{45} + \frac{61x^8}{315} + \frac{381x^9}{689} + \frac{1384x^{10}}{14175}$ el polinomio de Taylor de $f(x)$ con grado 10 centrado en 0?
22. Utilizando el polinomio de Taylor centrado en cero de grado más bajo (distinto de cero) de las funciones $\cos x$ y $\sqrt{1+x}$ calcula $\cos(0,04)$ y $\sqrt{1,04}$. Compara los resultados obtenidos con los que se obtiene utilizando la calculadora
23. Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, elabora un método sencillo para, a partir de la aproximación de Taylor, calcular $\sqrt[3]{1+x}$ cuando $x \ll 1$
24. El factor de Lorentz, γ , es una cantidad fundamental en la teoría de la relatividad, ya que está presente en las ecuaciones que describen fenómenos como la dilatación temporal, la contracción de longitudes o en las expresiones relativistas de la energía cinética o del momento lineal. Por ejemplo, en el marco de la teoría de la relatividad especial, el tiempo propio de un observador "1", t_1 , que se mueve con velocidad "v" experimenta una dilatación con respecto al tiempo propio de un observador "2" en reposo, t_2 , según la expresión $t_2 = \gamma t_1$, donde γ es el factor de Lorentz mencionado anteriormente y viene dado por:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

donde c es la velocidad de la luz. Aproximando el factor de Lorentz mediante el polinomio más sencillo, calcula su valor en el caso en que el observador "1" se mueve con respecto a "2" a una velocidad igual al 10% de la velocidad de la luz. A continuación, utiliza esa estimación de γ para calcular (en días) el intervalo de tiempo que tiene que transcurrir en "1" para que en "2" transcurra un día más. (*Nota:* El cálculo del polinomio es más sencillo tomando como variable x el cociente $\frac{v^2}{c^2}$)